MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 1

DATO(dd-mm-åå): 10/09/26

Klasse# 06 Skemagruppe (A eller C): C

Studieretning: Machine Learning og Datavidenskab

Navn (inkl. mellemnavne): Tern Yuka Ringsted Følbæk

KU-brugernavn: nhx906

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

Opgave 1

a) Bestem først reele tal, a og b, sådan at $(a+ib)^2 = 5+12i$

Vi begynder med at anvende vores kvadratsætning som siger følgende:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

dvs.

$$(a+ib)^2 = a^2 + b^2 i^2 + 2abi = a^2 - b^2 + 2abi$$

Vi vil vise at denne ligning passer. Og det kan vi gøre, ved at vise at imaginærdelen og reeldelen af begge punkter, stemmer overens. Derfor opstiller jeg følgende to ligninger.

$$\begin{aligned} 5 &= a^2 - b^2 \\ 12 &= 2ab \end{aligned}$$

Jeg vælger at isolerer b i den nederst ligning.

$$12 = 2ab \iff \frac{12}{2a} = b \iff \frac{6}{a} = b$$

Jeg sætter nu b i anden, og substituerer a^2med x.

$$b^2 = \frac{6^2}{a^2} = \frac{36}{x}$$

Nu indsætter jeg b i den anden ligning, altså vores "reeldels"ligning.

$$5 = a^2 - b^2 \iff 5 = x - \frac{36}{x}$$

og ganger med x i alle led, og danner dermed en andengradsligning

$$5 = x - \frac{36}{x} \iff x^2 - 36 = 5x \iff x^2 - 5x - 36 = 0$$

Nu anvender jeg følgende formler til at løse vores andensgradsligning:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \\ d &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Jeg indsætter værdierne og løser for x.

$$d = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 - (-144) = 169$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \\ -4 \end{cases}$$

Vi ved at $x = a^2 \geq 0$, så $x = -4$ forkastes, og $x = 9$. Dvs. $a^2 = 9 \iff a = \pm 3$. Da $b = 6/a$, giver $a = 3$ at $b = 2$, og $a = -3$ giver $b = -2$. Opgaven beder kun om ét par, så jeg vælger $a = 3$ og $b = 2$.

Nu kan vi indsætte vores a,b i denne oprindelig ligning.

$$(a+ib)^2 = 3^2 - 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2i = 9 - 4 + 12i = 5 + 12i$$

Vi har bekræftet at ligningen passer, da:

$$5 + 12i = 5 + 12i$$

b) Find samtlig komplekse løsninger til ligningen $z^4 - 10z^2 + 169 = 0$

Jeg opdeler denne process i to dele. Jeg begynder med at omdanne ligningen til en andengradsligning, finder rødderne, og udfolder det ud, til en til andengradsligning. Finder rødderne, og har dermed fundet de 4 rødder til vores oprindelig fjerdegradsligning.
Jeg gøre brug af substituition, og siger $u = z^2$, og omskriver ligningen til:

$$z^4 - 10z^2 + 169 = 0 \iff u^2 - 10u + 169 = 0$$

Nu bruger jeg samme formler som før:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$
$$d = b^2 - 4ac$$

Indsætter vores værdier:

$$d = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 169 = 100 - 676 = -576$$

Da $d = -576 < 0$, giver Sætning 3.4.8 (iii):

$$u = \frac{10 \pm i\sqrt{576}}{2} = \frac{10 \pm 24i}{2} = 5 \pm 12i$$

Sætningen siger, at hvis diskriminanten er negativ, så kan vi bytte plads mellem b^2 og $4ac$, for at vi så får et positiv tal. Så sætter vi også i udenfor kvadratoden. Det giver samme resultat, da: $(24i)^2 = -576$.
Nu kan vi udfolde vores substituition og sige følgende:

$$u_1 = 5 - 12i = z^2$$
$$u_2 = 5 + 12i = z^2$$

Vi løser nu for $u_2 = 5 + 12i = z^2$ på samme måde som vi gjorde i opgave a.

$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

Reeldel: $a^2 - b^2$ Imaginærdel: $2ab$
Jeg bruger substituition igen og siger $w = a^2$

$$
\begin{aligned}
2ab &= 12 \\
b &= \frac{12}{2a} \\
b &= \frac{6}{a} \\
b^2 &= \frac{36}{a^2} \\
b^2 &= \frac{36}{w}
\end{aligned}
$$

Indsætter b:

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= 5 \\
w - \frac{36}{w} &= 5 \\
w^2 - 36 &= 5w \\
w^2 - 5w - 36 &= 0
\end{aligned}
$$

Anvender:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \\
d &= b^2 - 4ac
\end{aligned}
$$

Vi indsætter vores værdier: $a = 1, b = -5, c = -36$

$$
\begin{aligned}
d = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169 \\
x = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \\ -4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(Samme som i opgave a.)
w har dermed løsningerne 9 og -4. Da $w = a^2 \geq 0$, kan $w = -4$ ikke bruges, så $w = 9$:

$$
a^2 = 9 \iff a = \pm 3
$$

Jeg vælger $a = 3$ og indsætter i $b = 6/a$:

$$
b = \frac{6}{3} = 2
$$

Dvs. $z = 3 + 2i$ er en løsning. Da $(-z)^2 = z^2$, er $z = -(3 + 2i)$ også en løsning:

$$
\sqrt{5 + 12i} = \pm(3 + 2i)
$$

Og for $u_1 = 5 - 12i$, som er den konjugerede af u_2, skifter vi fortegnet på imaginærdelen. Det følger Lemma 3.5.3, som siger:

Lemma 3.5.3. Lad $P(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$ være et reelt polynomium (alle $c_i \in \mathbb{R}$). Hvis r er en rod i P, så er den konjugerede $\overline{r}$ også en rod.

Da $z^4 - 10z^2 + 169$ har reelle koefficienter, er de konjugerede også rødder:

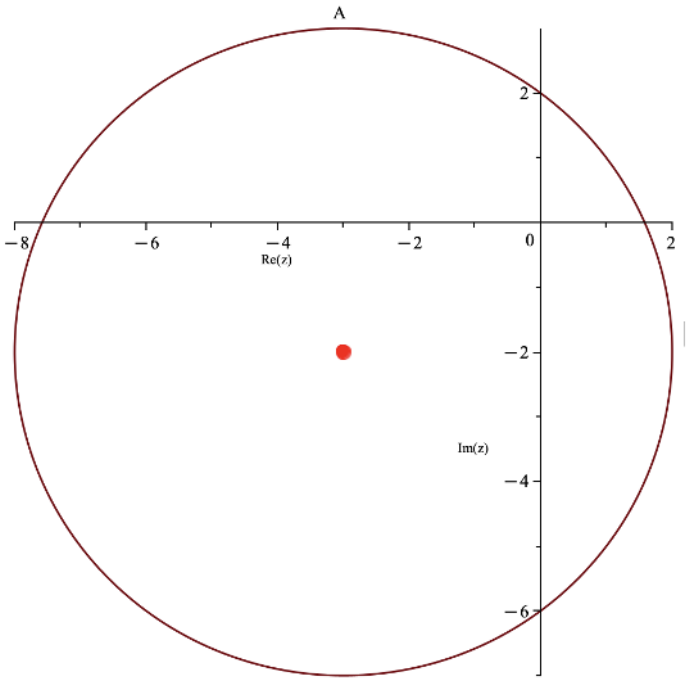
$$\sqrt{5 - 12i} = \pm(3 - 2i)$$

Nu har vi vores 4 rødder:

$$\begin{aligned} -(3 + 2i) \\ (3 + 2i) \\ -(3 - 2i) \\ (3 - 2i) \end{aligned}$$

Ved substitutionen $u = z^2$ omskrev jeg fjerdegradsligningen til andengradsligningen $u^2 - 10u + 169 = 0$, som har rødderne $u = 5 \pm 12i$. Tilbage stod ligningen $z^2 = 5 + 12i$, som med samme metode som i a) giver $z = \pm(3 + 2i)$, med de konjugerede $\pm(3 - 2i)$ som også er rødder.

c) Betragt mængden $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 + 2i| = 5\}$. Skitser A ved hjælp af Maple.



Mængden A, siger at elementerne i A, er alle komplekse tal z, hvor distancen mellem z og -3-2i skal være 5. Altså, A er en cirkel med centrum i -3-2i og radius 5. Jeg opdeler derfor vores reel og imaginærdel. Jeg skriver $z = a + ib$ og bruger pythagoras:

$$|z+3+2i| = |(a+3)+i(b+2)| = \sqrt{(a+3)^2+(b+2)^2} = 5 \iff (a+3)^2+(b+2)^2 = 25$$

Har derfor skrevet de følgende Maple kommandoer:

```
restart;
with(plots);
z := a + b*I:
eq := (a+3)^2 +(b+2)^2 = 25;
cirkel := implicitplot(eq, a = -10 .. 5, b = -10 ..5):
centrum := pointplot([-3,-2], symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = red):
display(cirkel, centrum, labels = ["Re(z)", "Im(z)"], title = "A")
```

d) Vis at elementerne i $A \cap \mathbb{R}$ netop er tallene $-3 \pm \sqrt{21}$

$A \cap \mathbb{R}$ er alle elementer som er i med i mængden A OG i mængden $\mathbb{R}$.
Vi skal vise at alle reele tal i mængden A, er netop $-3 \pm \sqrt{21}$. Det gøre vi ved at sætte vores imaginær del til 0 (for at sørge for vi er på vores Re akse).
For et reelt tal $z = a$ (dvs. $b = 0$) gælder

$$\begin{aligned} a \in A &\iff (a+3)^2 + 2^2 = 25 \\ &\iff (a+3)^2 = 21 \\ &\iff a = -3 \pm \sqrt{21} \end{aligned}$$

Og disse tal, approximerede til 4 decimaler, er: -7.5826, 1.5826
Maple kommando:

```
evalf[5]({-3+sqrt(21), -3-sqrt(21)})
```