

MatIntroMatNat

OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 3

DATO(dd-mm-åå): 03/10/26

Klasse# 06 Skemagruppe (A eller C): C

Studieretning: Machine Learning og Datavidenskab

Navn (inkl. mellemnavne): Tern Yuka Ringsted Følbæk

KU-brugernavn: nhx906

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

Opgave 3

Lad $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + k, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1+x}{2x}, & x > 1 \end{cases}$$

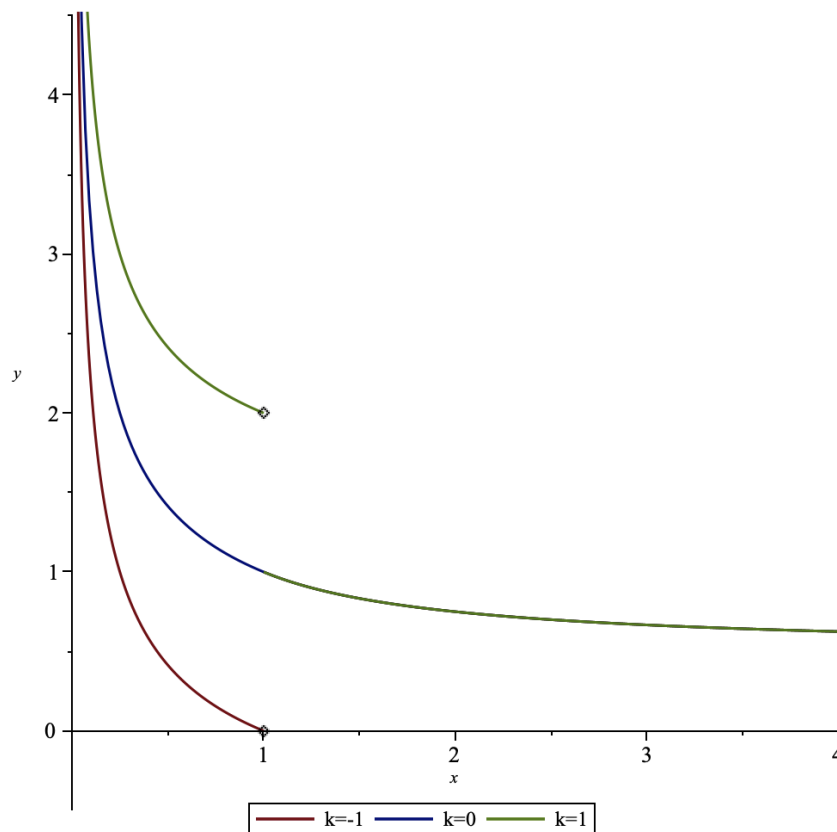
hvor $k \in \mathbb{R}$.

a)

Maple kommando:

```
f := x -> piecewise(x <= 1, 1/sqrt(x) + k, (1+x)/(2*x)):
```

```
plot([seq(eval(f(x), k = j), j in [-1, 0, 1])], x = 0..4, y = -0.5..4.5,  
      discont = true, legend = ["k=-1", "k=0", "k=1"]);
```



I min graf, gøre jeg brug af konstanten under værdierne -1, 0 og 1. Hvor man kan se grenene hænger sammen når $k = 0$.

b)

Lad $k = 0$. På $(0, 1)$ og $(1, \infty)$ er f differentiabel som sammensætning af differentiable funktioner. I $x = 1$ er $f(1) = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1+x}{2x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{2x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

De ensidige grænser er ens, så $f'(1) = -\frac{1}{2}$, og f er differentiabel på hele $(0, \infty)$.

c)

Ifølge b) er f differentiabel (og dermed kontinuert) på $[\frac{1}{4}, 2]$. Middelværdisætningen giver et $c \in (\frac{1}{4}, 2)$ med

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(\frac{1}{4})}{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4} - 2}{\frac{7}{4}} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}} = -\frac{5}{7}.$$

Dvs. $f'(x) = -\frac{5}{7}$ har en løsning i $[\frac{1}{4}, 2]$.

d)

Nej. $f(1) = 1 + k$, mens $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1+1}{2} = 1$. For $k \neq 0$ er $1 + k \neq 1$, så f er ikke kontinuert i 1 og derfor ikke differentiabel dér.

Man kan også se på grafen at funktionerne kun hængser sammen når $k = 0$. (Jeg har selvfølgelig ikke gennemgået alle værdier i $\mathbb{R}$ som k kan være, derfor giver jeg også en logisk forklaring)

e)

Lad $k > 0$. På $(0, 1]$ er $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} < 0$, og på $(1, \infty)$ er $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0$, så f er aftagende på hvert stykke. For $x \leq 1 < y$ gælder

$$f(x) \geq f(1) = 1 + k > 1 > \frac{1+y}{2y} = f(y),$$

da $1 + y < 2y$ for $y > 1$. Altså er f aftagende på hele $(0, \infty)$.

Hvis $k < 0$, er $f(1) = 1 + k < 1$, så springet i $x = 1$ går opad (som jeg også viser i grafen). Derfor er antagelsen $k > 0$ nødvendig i vores argument.