MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 2

DATO(dd-mm-åå): 21/09/26

Klasse# 06 Skemagruppe (A eller C): C

Studieretning: Machine Learning og Datavidenskab

Navn (inkl. mellemnavne): Tern Yuka Ringsted Følbæk

KU-brugernavn: nhx906

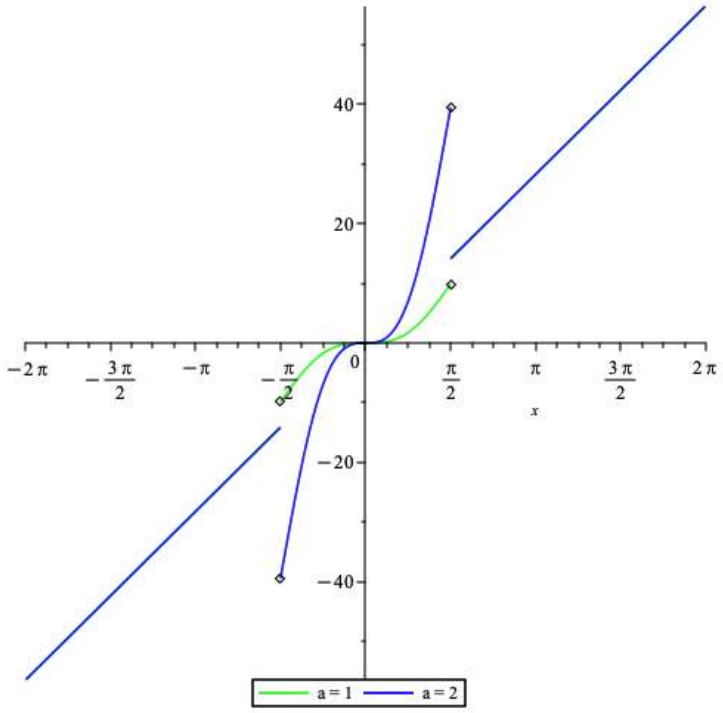
Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

Opgave 2

En funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 4a^2x^2\sin(x), & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 9x, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Plot grafen for f ved hjælp af Maple for værdierne $a = 1$ og $a = 2$.



Den grønne kurve er $a = 1$ og den blå er $a = 2$. På $|x| > \frac{\pi}{2}$ falder de to grafer sammen i linjen $y = 9x$, da a ikke indgår der; forskellen ses kun på midterstykket $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. For begge værdier af a er der spring i $x = \pm\frac{\pi}{2}$.
Maple kommandoer:

```
restart;

f := (x, a) -> piecewise(abs(x) <= Pi/2, 4*a^2*x^2*sin(x), 9*x);

plot([f(x, 1), f(x, 2)], x = -2*Pi .. 2*Pi,
     color = [green, blue],
     legend = ["a = 1", "a = 2"],
     discont = true);
```

b) Bestem først uden Maple de ensidige grænseværdier $\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x)$ og $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} f(x)$.

For x tæt på $\frac{\pi}{2}$ *nedefra* er $x < \frac{\pi}{2}$, altså $|x| \le \frac{\pi}{2}$, så det er den øverste gren der gælder. Funktionen $f(x) = 4a^2x^2\sin(x)$ er kontinuert på hele $\mathbb{R}$, da den er et produkt af polynomiet $4a^2x^2$ og sin, der begge er kontinuerte (Sætning 5.1.4).
Beregning af grænseværdi:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x) = 4a^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4a^2\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot 1 = a^2\pi^2.$$

Tilsvarende er $x > -\frac{\pi}{2}$ for x tæt på $-\frac{\pi}{2}$ *oppefra*, altså $|x| < \frac{\pi}{2}$, og igen gælder den øverste gren:

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+} f(x) = 4a^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4a^2\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot(-1) = -a^2\pi^2.$$

Den anden gren, når: $|x| > \frac{\pi}{2}$, er $f(x) = 9x$, er et førstegradspolynomium, som er kontinuert, så også her finder vi grænseværdien ved at sætte ind. Det giver de to grænseværdier:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x) = 9\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to(-\pi/2)^-} f(x) = 9\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{9\pi}{2}.$$

Maple giver

```
> restart;
  f := (x, a) -> piecewise(abs(x) <= Pi/2, 4*a^2*x^2*sin(x), 9*x);
  limit(f(x, a), x = Pi/2, left);
  limit(f(x, a), x = -Pi/2, right);

  limit(f(x, a), x = Pi/2, right);
  limit(f(x, a), x = -Pi/2, left);
```

$$f := (x, a) \mapsto \begin{cases} 4\cdot a^2\cdot x^2\cdot\sin(x) & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 9\cdot x & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\pi^2 a^2$$
$$-\pi^2 a^2$$
$$\frac{9\pi}{2}$$
$$-\frac{9\pi}{2}$$

$$\pi^2a^2, \qquad -\pi^2a^2, \qquad \frac{9\pi}{2}, \qquad -\frac{9\pi}{2},$$

c) For hvilke værdier af a er f kontinuert?

For $|x| < \frac{\pi}{2}$ er $f(x) = 4a^2x^2\sin(x)$, og for $|x| > \frac{\pi}{2}$ er $f(x) = 9x$. Begge udtryk er kontinuert, så f er kontinuert i ethvert $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ uanset værdien af a.
Uligheden i den øverste gren er ikke skarp ($|x| \le \frac{\pi}{2}$), så $x = \pm\frac{\pi}{2}$ hører til den øverste gren. Funktionsværdierne i overgangspunkterne er derfor

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = a^2\pi^2, \qquad f\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = -a^2\pi^2.$$

Efter Observation 5.4.7 er f kontinuert i $\frac{\pi}{2}$ netop hvis begge ensidige grænseværdier er lig $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Fra b) er grænseværdien fra venstre $a^2\pi^2$, hvilket altid stemmer med funktionsværdien; kravet kommer derfor fra højre:

$$a^2\pi^2 = \frac{9\pi}{2} \iff a^2 = \frac{9}{2\pi} \iff a = \pm\frac{3}{\sqrt{2\pi}}.$$

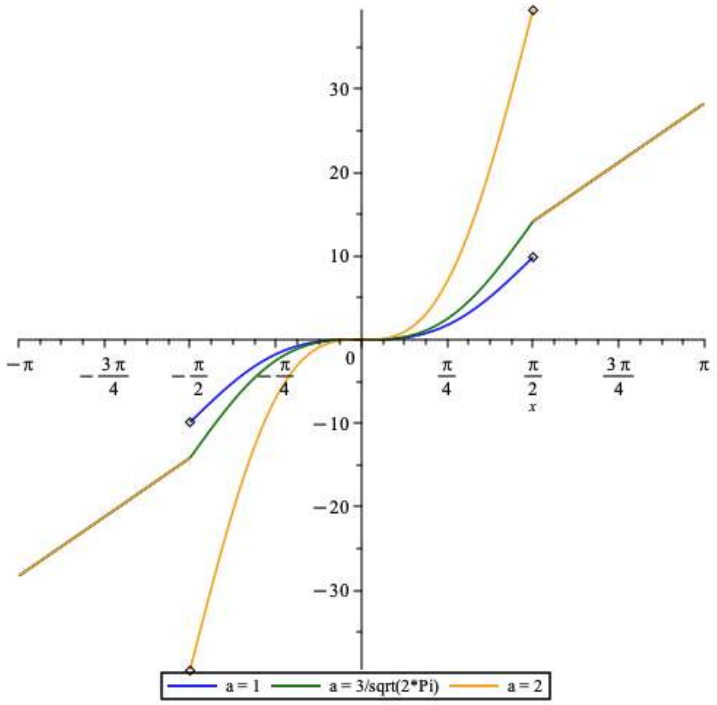
Nu mangler vi det andet overgangspunkt, $x = -\frac{\pi}{2}$. Her skal funktionsværdien $-a^2\pi^2$ passe med grænseværdien udefra, som fra b) er $-\frac{9\pi}{2}$:

$$-a^2\pi^2 = -\frac{9\pi}{2} \iff a^2\pi^2 = \frac{9\pi}{2},$$

hvor vi bare har ganget med -1 på begge sider. Det er nøjagtig den samme ligning som ovenfor. De to overgangspunkter kræver det samme af a, og vi skal kun løse én ligning. Konklusion:

$$f \text{ er kontinuert} \iff a = \pm\frac{3}{\sqrt{2\pi}} \approx \pm 1{,}197.$$

Der står $\pm$, fordi ligningen $a^2 = \frac{9}{2\pi}$ har to løsninger. Begge fungerer, for a optræder kun som a^2 i forskriften for f.
Nedstående graf viser hvordan, $a = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}$, gøre at begge grene hænger sammen.



d) Begrund, at ligningen $f(x) = 1$ har mindst én løsning, når $a = 1$.

Vi sætter $a = 1$ og bruger intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Dv.s det er kun den øverste gren vi skal bruge:

$$f(x) = 4x^2 \sin(x).$$

Det gælder også i selve endepunktet $x = \frac{\pi}{2}$, fordi uligheden $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ er ikke skarp. Grenen $9x$ bruges kun for $x > \frac{\pi}{2}$, altså uden for intervallet, så f er kontinuert på hele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Nu laver vi en ny funktion g på $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$g(x) = f(x) - 1.$$

Grunden er, at $g(x) = 0$ betyder det samme som $f(x) = 1$. Vi skal altså bare finde et nulpunkt for g. Funktionen g er kontinuert, fordi vi kun trækker tallet 1 fra en kontinuert funktion (Sætning 5.1.4).
Vi regner g i de to endepunkter:

$$g(0) = 4 \cdot 0^2 \cdot \sin(0) - 1 = -1,$$

$$g\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - 1 = \pi^2 - 1 \approx 8{,}87.$$

Det første tal er negativt, og det andet er positivt.
g er altså kontinuert på $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ og har modsat fortegn i de to endepunkter. Så siger Skæringssætningen (Sætning 5.2.1), at der findes et tal c mellem 0 og $\frac{\pi}{2}$ med

$$g(c) = 0, \qquad \text{altså} \qquad f(c) = 1.$$

Ligningen $f(x) = 1$ har derfor mindst én løsning. ■